

Teoria miary
WPPT IIr. semestr zimowy 2009
Wykład 5. Zbiory borelowskie, miara zewnętrzna

22/10/09

ZBIORY BORELOWSKIE

Zakładam, że wszyscy mają zaliczony kurs topologii.

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Wyróżniamy w niej rodzinę \mathcal{G} zbiorów otwartych i rodzinę \mathcal{F} zbiorów domkniętych. Zakładam, że wszyscy wiedzą, co to za zbiory. Przypomnijmy tylko, że zbiór jest domknięty wtedy i tylko wtedy gdy jego dopełnienie jest zbiorem otwartym. X i \emptyset są zarówno otwarte jak i domknięte. Dowolna suma i skończony przekrój zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym, a dowolny przekrój i skończona suma zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.

Definicja 1: Sigma-ciało generowane przez rodzinę zbiorów otwartych (równoważnie – domkniętych) nazywamy *sigma-ciałem zbiorów borelowskich*. *Zbiór borelowski* to element tego sigma-ciała.

Ćwiczenie: Uzasadnić, że wszelkie zbiory skończone, przeliczalne i ich dopełnienia są borelowskie.

Ćwiczenie: Uzasadnić, że jeśli X jest ośrodkowa, to sigma-ciało generowane przez dowolną bazę topologii jest równe sigma-ciału zbiorów borelowskich.

Definicja 2: Zbiór, który jest przeliczalnym przekrojem zbiorów otwartych nazywa się *zbiorem typu G_δ* , a zbiór, który jest przeliczalną sumą zbiorów domkniętych nazywa się *zbiorem typu F_σ* .

Ćwiczenie: Uzasadnić, że każdy zbiór domknięty jest typu G_δ , a otwarty typu F_σ . (UWAGA: Wymaga to wiedzy z topologii przestrzeni metrycznych.) Ponieważ oczywiście zbiory otwarte są też typu G_δ , a domknięte typu F_σ , to otrzymujemy, że przekrój rodzin zbiorów typu G_δ i typu F_σ zawiera sumę rodzin zbiorów otwartych i domkniętych.

Podobnie definiujemy zbiory typu $G_{\delta\sigma}$ i $F_{\sigma\delta}$ jako odpowiednio przeliczalne sumy zbiorów typu G_δ i przeliczalne przekroje zbiorów typu F_σ . Podobnie jak poprzednio, przekrój tych klas zawiera sumę klas poprzednich.

Poniższy fragment ma charakter informacyjny. Podaję go bez dowodów.

Przez indukcję pozaskończoną, dla dowolnej liczby porządkowej α definiujemy dwie klasy, powiedzmy Σ_α i Π_α .

(UWAGA: Jest to zmiana oznaczenia: Σ_0 to zbiory otwarte, Π_0 - domknięte, Σ_1 to F_σ , a Π_1 to G_δ , Σ_2 to $G_{\delta\sigma}$ a Π_2 to $F_{\sigma\delta}$. O ile w oznaczeniach $G_{\delta\dots}$ i $F_{\sigma\dots}$ główna litera zależy od *rodziny startowej*, o tyle w oznaczeniu Σ_α i Π_α główna litera zależy od *ostatnio użytego działania*.)

Rodziny te spełniają warunek taki, że przekrój Σ_α i Π_α zawiera sumę wszystkich rodzin Σ_β i Π_β po $\beta < \alpha$.

Sigma-ciało zbiorów borelowskich uzyskuje się jako sumę po wszystkich $\alpha < \omega_1$ rodzin Σ_α (równoważnie Π_α). Jest to *efektywna* definicja rodziny zbiorów borelowskich.

Nietrudno zauważyć, że jeśli X jest przestrzenią mocy \mathfrak{C} (continuum) i jest óśrodkowa, to zbiorów borelowskich jest znacznie mniej niż wszystkich podzbiorów X (jest ich co najwyżej \mathfrak{C} , a wszystkich podzbiorów jest $2^{\mathfrak{C}}$.) To właśnie na tym sigma-ciele będziemy najczęściej określać miary na przestrzeniach metrycznych (a nie na 2^X).

MIARA ZEWNĘTRZNA

Definicja 3: Miarą zewnętrzną nazywamy funkcję zbioru $\bar{\mu} : 2^X \rightarrow [0, \infty]$, spełniającą trzy warunki:

1. $\bar{\mu}(\emptyset) = 0$
2. $A \subset B \implies \bar{\mu}(A) \leq \bar{\mu}(B)$ (monotoniczność)
3. $\bar{\mu}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_n)$ (przeliczalna podaddytywność).

(Z 3. wynika natychmiast skończona podaddytywność, jednak 2. nie wynika z 3.)

Ćwiczenie: Wykaż, że dla miary zewnętrznej warunek 3. zachodzi dla dowolnych (nie tylko rozłącznych) sum przeliczalnych.

Przykład 1: Niech $\nu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$ będzie dowolną funkcją zbioru określoną na dowolnej rodzinie \mathcal{B} zawierającej X i \emptyset , taką że $\nu(\emptyset) = 0$. Miarę zewnętrzną $\bar{\mu}$ (określoną na wszystkich podzbiórach) uzyskamy następująco:

$$\bar{\mu}(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n) : \forall n \ B_n \in \mathcal{B}, \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \supset A \right\}.$$

Uwaga: Rodzina w nawiasie jest zawsze niepusta (dlaczego?).

Powyższą definicję można wyrazić słowami następująco: Funkcja ν to prymitywny “surogat miary” (bez żadnych dobrych własności oprócz zera dla zbioru pustego) określona tylko na niektórych zbiorach (nazwijmy ją “masa”). Miara zewnętrzna zbioru A to “minimalna” sumaryczna masa przeliczalnego pokrycia zbioru A zbiorami z \mathcal{B} (“minimalna” dlatego w cudzysłowie, że chodzi o infimum, a nie o minimum. Infimum nie musi być realizowane w danej rodzinie liczb). Czyli chodzi o “jak najbliższe” przeliczalne pokrycie zbioru A zbiorami, które mają zdefiniowaną masę.

Ćwiczenie: Sprawdź, że jest to faktycznie miara zewnętrzna.